

(No additional sheet will be supplied)

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

1. Test the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right)$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right)$ యొక్క అభిసరణతను పరిశీలించుము.

2. Test the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2}$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణతను పరిశీలించుము.

3. Examine the continuity of the function $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$, $x \neq 0$, $f(0) = 1$ at $x = 0$.

$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$; $x \neq 0$ మరియు $f(0) = 1$ ప్రమేయము యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను $x = 0$ వద్ద పరీక్షించండి.

4. Discuss the continuity of the function f defined by $f(x) = \frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$ if $x \neq 0$; $f(x) = 1$ if $x = 0$.

$f(x) = \frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$; $x \neq 0$, $f(x) = 1$, $x = 0$ గా నిర్వచించబడిన ప్రమేయము f యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను గూర్చి చర్చించండి.

5. Show that $f(x) = x \tan^{-1} \frac{1}{x}$ when $x \neq 0$ and $f(0) = 0$ is not derivable at $x = 0$.

$x = 0$ వద్ద $f(x) = x \tan^{-1} \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ మరియు $f(0) = 0$ ప్రమేయము అవకలనీయం కాదు అని చూపండి.

6. State and prove Lagrange's mean value theorem.

లెగ్రాంజ్ మాధ్యమ విలువల సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి

7. If $f(x) = 2x - 1$ on $[0,1]$ and $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ then compute $U(P, f)$, $L(P, f)$ and $W(P, f)$.

$f(x) = 2x - 1$ మరియు $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ అయితే $[0,1]$ పై $U(P, f)$, $L(P, f)$ మరియు $W(P, f)$ విలువలను కనుగొనుము.

8. If $f : [a, b] \rightarrow R$ is a bounded function then show that $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) dx$.

$f : [a, b] \rightarrow R$ పరిబద్ధ ప్రమేయము అయితే $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) dx$ అని నిరూపించండి.

9. Verify first mean value theorem on $[-1,1]$ for the functions $f(x) = e^x$, $g(x) = x$.

$f(x) = e^x$, $g(x) = x$ ప్రమేయాలను $[-1,1]$ అంతరము పై మొదటి మధ్యమ విలువలు (సమాకలనం) సిద్ధాంతమును పరిశీలించండి.

10. If $f(x) = \frac{1}{1+x}$ and considering the integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ then show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right] = \log 2$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ ప్రమేయమును } \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \text{ సమాకలనంగా పరిగణిస్తే } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right] = \log 2$$

అని నిరూపించండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

11. State and prove D-Alenbert's ratio test.

డి-ఆంబర్ట్ నిష్పత్తి పరీక్షను నిర్వచించి నిరూపించుము.

Or

12. Test for absolutely convergence or conditionally convergence of $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ యొక్క సంపూర్ణ అభిసరణను లేక ఖచ్చిత అభిసరణతను పరిశీలించండి.

13. State and prove Intermediate value theorem of continuity.

అవిచ్ఛిన్నత మధ్యము మూల్య సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

Or

14. Prove that every uniformly continuous function is continuous. But converse is not true.

సరి ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నము, అవిచ్ఛిన్నము అని చూపుము. దీని వివర్యము నిజంకానవసంలేదు, మీ జవాబును నమర్చించండి.

15. State and prove Rolle's mean value theorem.

రోల్స్ మధ్యము మూల సిద్ధాంతము నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

16. Find the value of 'C' by Cauchy's mean value theorem for $f(x) = \frac{1}{x^2}$ and $g(x) = \frac{1}{x}$ in $[a, b]$ where $0 < a < b$.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ ప్రమేయాలకు $[a, b]$, $0 < a < b$ కోషి సిద్ధాంతం నుండి 'C' విలువ కనుగొనండి.

17. Show that $f(x) = 3x + 1$ is integrable on $[1, 2]$ and $\int_1^2 (3x + 1)dx = \frac{11}{2}$.

$[1, 2]$ అంతరము పై $f(x) = 3x + 1$ సమాకలని అని చూపి, మరియు $\int_1^2 (3x + 1)dx = \frac{11}{2}$ అగును అని నిరూపించండి.

Or

18. If $f : [a, b] \rightarrow R$ is monotonic on $[a, b]$ then prove that f is integrable on $[a, b]$

$f : [a, b] \rightarrow R$ ప్రమేయం $[a, b]$ లో ఏక దిష్టిం అయితే $[a, b]$ మీద సమాకలనీయం అని నిరూపించండి.

19. Evaluate $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{n}{n^2 + r^2}$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{n}{n^2 + r^2}$ ను సాధించండి.

Or

20. State and prove fundamental theorem of Integral Calculus.

సమాకలన ప్రాథమిక సిద్ధాంతం లేక మూల సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.